

## МЕХАНИКА

УДК 05.19.21

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО И  
ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЕЙ, КОНТАКТИРУЮЩИХ  
СО СРЕДОЙ, ОБЛАДАЮЩЕЙ СВОЙСТВОМ САМОРЕГУЛЯЦИИ****М.Б.АХУНДОВ, С.Д.ЭМИНЗАДЕ***Бакинский Государственный Университет*  
*mexanika.bsu.az@mail.az*

*В статье приводится решение задач вынужденных продольных колебаний упругого и вязкоупругого стержней. На одном торце задается изменяющееся во времени по гармоническому закону перемещение. Другой торец опёрт в среду, обладающую свойством саморегуляции, которое описывается на основе известной модели деформируемой среды с биофактором.*

**Ключевые слова:** саморегуляция, колебания, стержень, вязкоупругость, амплитудно-частотная характеристика.

Задачи биомеханики, а также задачи управления и регулирования колебательных процессов конструкционных систем в большей или меньшей степени связаны с проблемой контактных взаимодействий со средой, отклик которой на внешнее воздействие зависит от предыстории или от истории нагружения. То есть внешнее воздействие переходит в отклик контактной среды, преобразуемый самой средой. Такое свойство среды будем называть свойством саморегуляции. Модели саморегуляционных систем в биомеханике есть не что иное, как модели биоактивных материалов, то есть материалов с присутствием биофактора. Подобные модели разработаны, например, в работах [1; 2].

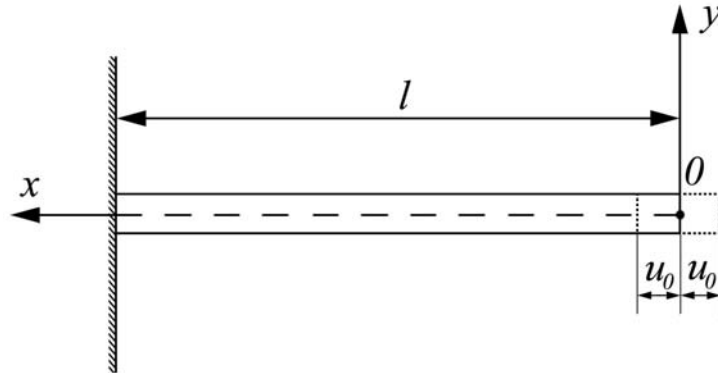
В настоящей работе используется модель саморегуляционной среды, отклик которой на силовое воздействие описывается моделью биофактора наследственного типа [2].

Обозначим через  $R(t)$  величину отклика саморегуляционной среды, а через  $\sigma_*(t)$  напряжение, определяемое внешним воздействием. Тогда согласно модели биофактора [2] связь отклика  $R(t)$  с внешним силовым фактором  $\sigma_*(t)$  будет:

$$R(t) = - \int_{-\infty}^t A(t-\tau) \sigma_*(\tau) d\tau; \quad A(t) > 0. \quad (1)$$

**Постановка задачи.**

Рассмотрим пока упругий стержень конечной длины  $l$ , контактирующий с саморегуляционной средой.



Поместим начало координат на свободном торце, а ось  $x$  направим вдоль оси стержня в сторону контактной среды. Примем, что свободный торец стержня подвержен вынужденным колебаниям постоянной амплитуды  $u_0$  и постоянной частоты  $\omega$  то есть:

$$u(x;t)|_{x=0} = u_0 \cos \omega t, \quad (2)$$

Допустим, что стержень жестко связан с контактной средой, а контактная реактивная сила  $\sigma_*(t)$  на единицу площади поперечного сечения определяется по схеме Винклеровского основания:

$$\sigma_*(t) = k \cdot u(l;t) \quad (3)$$

где  $k$  - коэффициент постели.

Тогда напряжение  $\sigma(x;t)$  в стержне на контактном торце согласно условию жёсткой заделки будет суммой реактивной силы Винклеровского основания и отклика среды:

$$\sigma(l;t) = \sigma_*(t) + R(t). \quad (4)$$

Подставляя в это соотношение представление (1), а затем учитывая в полученном (3), найдем:

$$\sigma(l;t) = k \left[ u(l;t) - \int_{-\infty}^t A(t-\tau) u(l;\tau) d\tau \right]. \quad (5)$$

Считая стержень упругим, согласно закону Гука получим:

$$\sigma(l;t) = Eu'(l;t), \quad (6)$$

где  $E$  - модуль Юнга, а штрих над функцией продольного перемещения  $u(x;t)$  означает частную производную по пространственной координате  $x$ .

Подставляя (6) в (5), получим граничное условие на контактном торце:

$$u'(l;t) = \frac{k}{E} \left[ u(l;t) - \int_{-\infty}^t A(t-\tau)u(l;\tau) d\tau \right]. \quad (7)$$

Для вязкоупругого стержня граничное условие на контактном торце получим из (7) заменив модуль Юнга  $E$  соответствующим оператором [3]:

$$\frac{1}{E} \rightarrow \frac{1}{E} (1 + K^*), \quad (8)$$

где оператор  $K^*$  является линейным интегральным оператором ползучести наследственного типа:

$$K^* f(t) = \int_{-\infty}^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Здесь  $K(t)$  - ядро ползучести.

Осуществляя в граничном условии (7) переход согласно (8), найдем следующее выражение граничного условия на контактном торце вязкоупругого стержня:

$$u'(l;t) = \frac{k}{E} \left\{ u(l;t) + \int_{-\infty}^t [K(t-\tau) - A(t-\tau)] u(l;\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} K(t-\tau) A(\tau-s) u(l;s) ds d\tau \right\}. \quad (10)$$

Для упругого стержня уравнение движения, как известно, имеет вид:

$$u''(x;t) = \frac{1}{c_0^2} \ddot{u}(x;t), \quad (11)$$

где

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (12)$$

стержневая скорость упругих волн, а точка над функцией перемещения означает дифференцирование по времени.

Уравнение движения для вязкоупругого стержня, с учетом замены (8) в (11) и (12), имеет вид:

$$u''(x;t) = \frac{1}{c_0^2} \left\{ \ddot{u}(x;t) + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \ddot{u}(x;\tau) d\tau \right\}. \quad (13)$$

Так как впрямь мы будем исследовать установившиеся колебания, то начальные условия не ставятся.

Тогда математическая задача об установившихся вынужденных колебаниях упругого стержня, контактирующего с саморегуляционной средой состоит из уравнения движения (11) и граничных условий (2) и (7).

Для вязкоупругого стержня соответствующая математическая задача состоит из уравнения движения (13) и граничных условий (2) и (10).

### Решение для упругого стержня.

Будем искать решение уравнения (11) в виде:

$$u(x;t) = B_1(x) \cos \omega t + B_2(x) \sin \omega t. \quad (14)$$

Подставляя это представление в (11) получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функций  $B_k(x)$ ,

$$B_k''(x) + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 B_k(x) = 0; \quad k = 1; 2. \quad (15)$$

Представим его решение в виде:

$$B_k(x) = c_{k1} \sin \frac{\omega x}{c_0} + c_{k2} \cos \frac{\omega x}{c_0}. \quad (16)$$

Неизвестные постоянные  $c_{k1}$  и  $c_{k2}$  определяются из граничных условий (2) и (7). Подставляя (14) в граничное условие (2), получим:

$$B_1(0) = u_0; \quad B_2(0) = 0 \quad (17)$$

откуда согласно (16) найдем:

$$c_{12} = u_0; \quad c_{22} = 0. \quad (18)$$

Тогда представления (16) примут вид:

$$\begin{cases} B_2(x) = c_{21} \sin \frac{\omega x}{c_0}; \\ B_1(x) = c_{11} \sin \frac{\omega x}{c_0} + u_0 \cos \frac{\omega x}{c_0}. \end{cases} \quad (19)$$

Подставим теперь (14) в граничное условие на контактном торце (7) и примем в качестве ядра саморегуляционного оператора следующее выражение:

$$A(t) = \lambda e^{-\mu t}. \quad (20)$$

С учетом того, что, тогда

$$\int_{-\infty}^t A(t-\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{\lambda}{\mu^2 - \omega^2} (\mu \cos \omega t + \omega \sin \omega t);$$

$$\int_{-\infty}^t A(t-\tau) \sin \omega \tau d\tau = \frac{\lambda}{\mu^2 - \omega^2} (\mu \sin \omega t - \omega \cos \omega t);$$

получим:

$$\begin{cases} \frac{E}{k} B_1'(l) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{\mu^2 - \omega^2}\right) B_1(l) + \frac{\lambda\omega}{\mu^2 - \omega^2} B_2(l); \\ \frac{E}{k} B_2'(l) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{\mu^2 - \omega^2}\right) B_2(l) - \frac{\lambda\omega}{\mu^2 - \omega^2} B_1(l). \end{cases} \quad (21)$$

Учитывая здесь представления (19) придем к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных  $c_{11}$  и  $c_{21}$ :

$$\begin{cases} \alpha c_{11} - \beta c_{21} = \gamma_1; \\ \beta c_{11} + \alpha c_{21} = \gamma_2; \end{cases}$$

где

$$\alpha = \frac{E\omega}{kc_0} \cos \frac{\omega l}{c_0} + \frac{\lambda\mu}{\mu^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega l}{c_0} - 1; \quad \beta = \frac{\lambda\omega}{\mu^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega l}{c_0};$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 + u_0 \left( \cos \frac{\omega l}{c_0} + \frac{E\omega}{kc_0} \sin \frac{\omega l}{c_0} \right); \quad \gamma_2 = -u_0 \frac{\lambda\mu}{\mu^2 - \omega^2} \cos \frac{\omega l}{c_0}.$$

Решение этой системы единственно, так как его главный определитель отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Это решение имеет вид:

$$c_{11} = \frac{\alpha\gamma_1 + \alpha_2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad c_{21} = \frac{\alpha\gamma_2 + \beta\gamma_1}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (22)$$

Согласно (14) для перемещения найдем:

$$u(x; t) = \left( c_{11} \sin \frac{\omega x}{c_0} + u_0 \cos \frac{\omega x}{c_0} \right) \cos \omega t + c_{21} \sin \frac{\omega x}{c_0} \sin \omega t.$$

Представим его в виде:

$$u(x; t) = u_0 R \cos(\omega t - \varphi), \quad (23)$$

где  $R$  - безразмерная амплитуда колебания,  $\varphi$  - начальная фаза колебаний:

$$\begin{cases} R(x; \omega) = \left\{ \left( \frac{c_{11}}{u_0} \sin \frac{\omega x}{c_0} + \cos \frac{\omega x}{c_0} \right)^2 + \left( \frac{c_{21}}{u_0} \sin \frac{\omega x}{c_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \\ \operatorname{tg} \varphi(x; \omega) = \frac{c_{21} \sin \frac{\omega x}{c_0}}{c_{11} \sin \frac{\omega x}{c_0} + u_0 \cos \frac{\omega x}{c_0}}. \end{cases} \quad (24)$$

### Решение для вязкоупругого стержня.

Будем искать решение уравнения (13) в следующем виде:

$$u(x, t) = \sum_k u_k(x; \gamma_k) e^{-i\gamma_k t}. \quad (25)$$

Подставляя это представление в уравнение (13) получим систему двух уравнений:

$$u_k''(x; \gamma_k) - \left( \frac{\lambda_k}{c_0} \right)^2 u_k(x; \gamma_k) = 0; \quad (26)$$

$$\left( 1 + \frac{\lambda_k^2}{\gamma_k^2} \right) e^{-i\gamma_k t} + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) e^{-i\gamma_k \tau} d\tau = 0, \quad (27)$$

где  $\lambda_k$  - некоторое комплексное число, определяемое уравнением (27) посредством параметров задачи при конкретизации ядра ползучести. Примем в качестве ядра ползучести слабосингулярное ядро Абеля:

$$K(t-\tau) = \frac{\mathcal{G}}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha}; \quad 0 < \alpha < 1 \quad (28)$$

Здесь  $\alpha$ ;  $\mathcal{G}$  - задаваемые параметры ядра,  $\Gamma(1-\alpha)$  - значение гамма функции Эйлера для переменной, равной  $1-\alpha$ .

Вычислим второе слагаемое левой части уравнения (27):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t K(t-\tau) e^{-i\gamma_k \tau} d\tau &= \frac{\mathcal{G}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{e^{-i\gamma_k \tau}}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = \\ &= \frac{\mathcal{G}}{\Gamma(1-\alpha)} e^{-i\gamma_k t} \int_0^\infty z^{-\alpha} e^{i\gamma_k z} dz; \quad z = t - \tau. \end{aligned} \quad (29)$$

Далее для несобственного интеграла получим:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty z^{-\alpha} e^{i\gamma_k z} dz = \int_0^\infty \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \cos \gamma_k z dz + i \int_0^\infty \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sin \gamma_k z dz = J_{-\alpha c} + i J_{-\alpha s}. \quad (30)$$

Здесь  $J_{-\alpha c}$ ;  $J_{-\alpha s}$  косинус и синус преобразования функции  $\frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ , которые, как известно, имеют вид:

$$J_{-\alpha c} = \gamma_k^{\alpha-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2}; \quad J_{-\alpha s} = \gamma_k^{\alpha-1} \cos \frac{\pi}{2}. \quad (31)$$

Учитывая (31) в (30), а полученное в (29), найдем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t K(t-\tau) e^{-i\gamma_k \tau} d\tau &= \mathcal{G} e^{-i\gamma_k t} \gamma_k^{\alpha-1} \left( \sin \frac{\pi\alpha}{2} + i \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right) = \\ &= \mathcal{G} \gamma_k^{\alpha-1} e^{-i\gamma_k t} i e^{-i \frac{\pi\alpha}{2}} = \mathcal{G} \gamma_k^{\alpha-1} i^{1-\alpha} e^{-i\gamma_k t}. \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя (32) в (27) получим следующее выражение для  $\lambda_k$ :

$$\lambda_k^2 = -\gamma_k^2 \left( 1 + \frac{\mathcal{G} i^{1-\alpha}}{\gamma_k^{1-\alpha}} \right). \quad (33)$$

Пусть  $\lambda_k = A_k + iB_k$ ;  $\lambda_k^2 = a_k + ib_k$ ;  $r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ . Так как  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ , то:

$$\lambda_k^2 = -\gamma_k^2 \left( 1 + \frac{\mathcal{G}}{\gamma_k^{1-\alpha}} i^{1-\alpha} \right) = -\gamma_k^2 \left( 1 + \frac{\mathcal{G}}{\gamma_k^{1-\alpha}} e^{i\frac{\pi(1-\alpha)}{2}} \right).$$

Если  $\gamma_k > 0$ , то:

$$a_k = -\gamma_k \left( 1 + \frac{\mathcal{G}}{\gamma_k^{1-\alpha}} \cos \frac{\pi(1-\alpha)}{2} \right); \quad b_k = -\mathcal{G} \gamma_k^{1-\alpha} \sin \frac{\pi(1-\alpha)}{2};$$

$$A_k = \sqrt{\frac{r_k + a_k}{2}}; \quad B_k = \sqrt{\frac{r_k - a_k}{2}}.$$

Если же  $\gamma_k < 0$ ; то

$$a = -|\gamma_k| \left( 1 + \frac{\mathcal{G}}{|\gamma_k|^{1-\alpha}} \cos \frac{\pi(1-\alpha)}{2} \right); \quad b_k = \mathcal{G} |\gamma_k|^{1-\alpha} \sin \frac{\pi(1-\alpha)}{2}$$

и тогда

$$A_k = \sqrt{\frac{r_k + a_k}{2}}; \quad B_k = -\sqrt{\frac{r_k - a_k}{2}}.$$

Отсюда следует, что если, например,  $\gamma_1 = \omega > 0$ ;  $\gamma_2 = -\omega < 0$ , то в рамках обозначений

$$\begin{cases} a = -\omega \left( 1 + \frac{\mathcal{G}}{\omega^{1-\alpha}} \cos \frac{\pi(1-\alpha)}{2} \right); & b = -\mathcal{G} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\pi(1-\alpha)}{2}; \\ r = \sqrt{a^2 + b^2}; & p = A = \sqrt{\frac{r+a}{2}}; & q = B = \sqrt{\frac{r-a}{2}}; \end{cases} \quad (34)$$

получим

$$\lambda_1 = p + iq; \quad \lambda_2 = p - iq \quad (35)$$

то есть

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda. \quad (36)$$

Перейдем к решению уравнения (26). Его представим в виде:

$$u_k(x; \gamma_k) = c_{k1} e^{\frac{\lambda_k x}{c_0}} + c_{k2} e^{-\frac{\lambda_k x}{c_0}}. \quad (37)$$

Обозначим  $u_k(0; \gamma_k) = u_{k0}$ , где  $u_{k0}$  - задаваемые величины.

Тогда из (37) найдем

$$c_{k1} + c_{k2} = u_{k0}. \quad (38)$$

Для удовлетворения граничного условия (10) конкретизируем виды ядер ползучести  $K(t-\tau)$  и саморегуляции  $A(t-\tau)$ :

$$K(t-\tau) = \frac{\mathcal{G}}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha}; \quad A(t-\tau) = \frac{\mu}{\Gamma(1-\beta)(t-\tau)^\beta}; \quad 0 < \alpha; \quad \beta < 1. \quad (39)$$

Тогда

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^t \{K(t-\tau) - A(t-\tau)\} u(l; \tau) d\tau = \sum_k (\mathcal{G}i^{1-\alpha} \gamma_k^{\alpha-1} - \mu i^{1-\beta} \gamma_k^{\beta-1}) e^{-i\gamma_k t}; \\ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \{K(t-\tau)A(\tau-s)\} u(l; s) ds d\tau = \mathcal{G}\mu i^{2-\alpha-\beta} \sum_k u_k(l) \gamma_k^{\alpha+\beta-2} e^{-i\gamma_k t}. \end{cases} \quad (40)$$

Учитывая (40) в граничном условии (10), найдем:

$$c_{k1} e^{\frac{\lambda_k l}{c_0}} - c_{k2} e^{-\frac{\lambda_k l}{c_0}} = \delta_k (c_{k1} e^{\frac{\lambda_k l}{c_0}} + c_{k2} e^{-\frac{\lambda_k l}{c_0}}), \quad (41)$$

где

$$\delta_k = \frac{k c_0}{E \lambda_k} \left\{ 1 + \mathcal{G} \gamma_k^{\alpha-1} i^{1-\alpha} - \mu \gamma_k^{\beta-1} i^{1-\beta} - \mathcal{G} \mu \gamma_k^{\alpha+\beta-2} i^{2-\alpha-\beta} \right\}. \quad (42)$$

Из (38) и (41) получим:

$$c_{k1} = \frac{u_{k0}}{1 + \frac{1 - \delta_k}{1 + \delta_k} e^{\frac{2\lambda_k l}{c_0}}}; \quad c_{k2} = \frac{u_{k0} e^{\frac{2\lambda_k l}{c_0}}}{\frac{1 + \delta_k}{1 - \delta_k} + e^{\frac{2\lambda_k l}{c_0}}}.$$

Учитывая эти представления в (37), получим:

$$u_k(x; \gamma_k) = \frac{u_{k0}}{1 + \frac{1 - \delta_k}{1 + \delta_k} e^{\frac{2\lambda_k l}{c_0}}} \left( e^{\frac{\lambda_k x}{c_0}} + \frac{1 - \delta_k}{1 + \delta_k} e^{\frac{\lambda_k (2l-x)}{c_0}} \right). \quad (43)$$

Граничное условие (2) удовлетворится, если принять, что:

$$\begin{cases} u_{10} = u_{20} = \frac{u_0}{2}; & u_{k0} = 0 \quad \text{при} \quad k \geq 3; \\ \gamma_1 = -\gamma_2 = \omega. \end{cases} \quad (44)$$

Учитывая (44) в (43), а последнее в (25) и принимая во внимание (34) – (36), получим следующее представление для решения (25):

$$\frac{u(x; t)}{u_0} = \text{Re} \left\{ \frac{e^{\frac{\lambda x}{c_0}} + \frac{1 - \delta}{1 + \delta} e^{\frac{\lambda(2l-x)}{c_0}}}{1 + \frac{1 - \delta}{1 + \delta} e^{\frac{\lambda l}{c_0}}} \cdot e^{-i\omega t} \right\}, \quad (45)$$

где

$$\delta = \frac{k \cdot c_0}{E\lambda} \left\{ 1 + \mathcal{G}\omega^{\alpha-1} i^{1-\alpha} - \mu\omega^{\beta-1} i^{1-\beta} - \mathcal{G}\mu\omega^{\alpha+\beta-2} i^{2-\alpha-\beta} \right\}. \quad (46)$$

Решение (45) представим в удобном для приложений виде:

$$\frac{u(x;t)}{u_0} = \Phi(x; \omega) \cos(\omega t - \varphi(x; \omega)). \quad (47)$$

Здесь

$$\Phi(x; \omega) = \frac{\sqrt{(n_1 n_2 + m_1 m_2)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}}{n_2^2 + m_2^2}; \quad (48)$$

$$\operatorname{tg} \varphi(x; \omega) = \frac{m_1 n_2 - n_1 m_2}{n_1 n_2 + m_1 m_2}. \quad (49)$$

В свою очередь:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = e^{\frac{px}{c_0}} \cos \frac{qx}{c_0} + e^{\frac{p(2l-x)}{c_0}} \left( \delta^{(3)} \cos \frac{q(2l-x)}{c_0} + \delta^{(4)} \sin \frac{q(2l-x)}{c_0} \right); \\ n_2 = 1 + e^{\frac{2pl}{c_0}} \left( \delta^{(3)} \cos \frac{2ql}{c_0} + \delta^{(4)} \sin \frac{2ql}{c_0} \right); \\ m_1 = e^{\frac{px}{c_0}} \sin \frac{qx}{c_0} - e^{\frac{p(2l-x)}{c_0}} \left( \delta^{(4)} \cos \frac{q(2l-x)}{c_0} - \delta^{(3)} \sin \frac{q(2l-x)}{c_0} \right); \\ m_2 = e^{\frac{2pl}{c_0}} \left( -\delta^{(4)} \cos \frac{2ql}{c_0} + \delta^{(3)} \sin \frac{2ql}{c_0} \right); \end{array} \right. \quad (50)$$

где

$$\delta^{(3)} = \frac{1 - (\delta^{(1)})^2 - (\delta^{(2)})^2}{(1 + \delta^{(1)})^2 + (\delta^{(2)})^2}; \quad \delta^{(4)} = \frac{2\delta^{(2)}}{(1 + \delta^{(1)})^2 + (\delta^{(2)})^2};$$

$$\delta = \delta^{(1)} + i\delta^{(2)}; \quad \delta^{(1)} = \frac{kc_0}{E} \frac{\eta_1 p - \eta_2 q}{p^2 + q^2}; \quad \delta^{(2)} = \frac{kc_0}{E} \frac{\eta_1 q + \eta_2 p}{p^2 + q^2};$$

$$\eta_1 = 1 + \mathcal{G}\omega^{\alpha-1} \cos \frac{\pi(1-\alpha)}{2} - \mu\omega^{\beta-1} \cos \frac{\pi(1-\beta)}{2} - \mu\mathcal{G}\omega^{\alpha+\beta-2} \cos \frac{\pi(2-\alpha-\beta)}{2};$$

$$\eta_2 = \mathcal{G}\omega^{\alpha-1} \sin \frac{\pi(1-\alpha)}{2} - \mu\omega^{\beta-1} \sin \frac{\pi(1-\beta)}{2} - \mu\mathcal{G}\omega^{\alpha+\beta-2} \sin \frac{\pi(2-\alpha-\beta)}{2}.$$

По приведенным выше формулам согласно (48), вычисляется амплитуда колебаний, согласно же (49) - отставание по фазе колебаний в зависимости от частоты колебаний, параметров ядер ползучести и саморегуляции.

Эти зависимости позволяют определить требования к параметрам саморегуляции опорной конструкции, при которых удастся избежать резонансных явлений или явлений близких к ним.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин Л.В. Модель биоупругого тела // Изв. АН СССР. МТТ, 1971, №3, с. 154-157.
2. Ахундов М.Б., Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В. Модель деформируемого тела с реакцией и приложение её к динамическим задачам биомеханики// Изв. АН СССР. МТТ, 1985, №6, с. 96-100.
3. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
4. Кручинин П.А., Мишанов А.Ю., Кудряшев О.Э. Алгоритм восстановления показаний системы видеоанализа движений человека по измерениям силовой платформы.// Вестн. МГУ, сер. 1, мат. и мех., 2009, №5, с. 33-37.
5. Aomura Shigeru, Takano Junichi, Abe Masato, Kijuchi Emiko, Kinose Takashi. Моделирование воздействия на инвалида в коляске при движении транспортного средства.// Nihon kikai gakkai ronbunshu. C.=Trans. Jap. Soc.Mech.Eng., 2007, 73, №731, p. 2131-2139.

## ÖZÜ-ÖZÜNÜ NİZAMLAYAN MÜHİTLƏ TƏMASDA OLAN ELASTİKİ VƏ ÖZLÜ ELASTİKİ ÇUBUĞUN MƏCBURİ RƏQSLƏRİ

M.B.AXUNDOV, S.D.EMİNZADƏ

### XÜLASƏ

Təqdim olunan məqalədə elastiki və özlü elastiki çubuğun rəqsi hərəkətləri məsələsinə baxılıb. Tirin bir ucunun harmonic qanunu ilə zaman boyu dəyişən yerdəyişməsi verilir. Tirin diqər ucu isə özü-özünü nizamlayan mühitlə təmasdadır. Özü-özünü nizamlanma xassəsi məlum bioamilə malik olan mühitin modeli ilə təsvir olunur.

**Açar sözlər:** özü-özünü nizamlama, rəqslər, çubuq, özlü-elastiklik, amplitud-tezlik xarakteristikası.

## THE COMPELLED FLUCTUATIONS OF THE ELASTIC AND VISCOELASTIC CORES CONTACTING TO THE MEDIUM WITH SELF-CONTROL PROPERTIES

M.B.AKHUNDOV, S.D.EMINZADE

### SUMMARY

The article decides the problems of the compelled longitudinal fluctuations of elastic and viscoelastic cores. Movement of one end under the harmonious law is recorded. The other end leans against the medium possessing the self-control property which is described on the basis of the known model of the environment deformable with the biofactor.

**Key words:** self-control, vibrations, rod, visco-elastic, amplitude frequency character.

*Поступила в редакцию: 19.02.2011 г.*

*Принято к печати: 17.06.2011 г.*